المحددات وحل أنظمة المعادلات

رياضة ا — إدارة الأعمال

مفهوم المحدد

المحدد عدد حقيقي يرتبط بكل مصفوفة **مربعة**، ونرمز لمحدد المصفوفة A بالرمز det(A) أو بوضع عناصرها بين خطين رأسيين. ويستخدم المحدد في معرفة ما إذا كان للمصفوفة معكوس، وفي حل أنظمة المعادلات الخطية.

محدد مصفوفة من الرتبة الثانية

إذا كانت A = [[a, b], [c, d]] فإن det(A) = a × d − b × c، أي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيسي ناقص حاصل ضرب عنصري القطر الآخر.

مثال: A = [[2, 1], [3, 4]]، إذن det(A) = 2 × 4 − 1 × 3 = 8 − 3 = 5.

محدد مصفوفة من الرتبة الثالثة

نستخدم طريقة **المفكوك** بعناصر الصف الأول مع الإشارات المتناوبة (+، −، +): نضرب كل عنصر في محدد المصفوفة الصغرى الناتجة من حذف صفه وعموده.

مثال: احسب محدد M = [[1, 2, 3], [0, 1, 4], [5, 6, 0]].

- العنصر 1 مضروباً في محدد [[1, 4], [6, 0]] = 1 × (0 − 24) = −24
- ناقص العنصر 2 مضروباً في محدد [[0, 4], [5, 0]] = −2 × (0 − 20) = +40
- زائد العنصر 3 مضروباً في محدد [[0, 1], [5, 6]] = 3 × (0 − 5) = −15

det(M) = −24 + 40 − 15 = 1.

ويمكن أيضاً استخدام **طريقة ساروس** الخاصة بالرتبة الثالثة: نكرر العمودين الأول والثاني على يمين المصفوفة، ثم نجمع حواصل ضرب الأقطار الهابطة الثلاثة ونطرح منها حواصل ضرب الأقطار الصاعدة الثلاثة.

خواص المحددات

1. محدد المصفوفة يساوي محدد منقولها.

2. تبديل صفين يغيّر إشارة المحدد.

3. إذا كان في المصفوفة صف (أو عمود) كل عناصره أصفار فالمحدد صفر.

4. إذا تساوى صفان أو تناسبا فالمحدد صفر.

5. ضرب صف واحد في عدد k يضرب المحدد في k.

6. محدد حاصل ضرب مصفوفتين يساوي حاصل ضرب محدديهما.

معكوس مصفوفة من الرتبة الثانية

المصفوفة المربعة لها معكوس إذا وفقط إذا كان محددها لا يساوي صفراً. وإذا كانت A = [[a, b], [c, d]] فإن معكوسها يساوي (1 ÷ det(A)) مضروباً في المصفوفة [[d, −b], [−c, a]]، أي نبدّل عنصري القطر الرئيسي ونغيّر إشارتي العنصرين الآخرين.

للمصفوفة A = [[2, 1], [3, 4]]: المعكوس = (1/5) × [[4, −1], [−3, 2]] = [[0.8, −0.2], [−0.6, 0.4]]. ويمكن التحقق بأن حاصل ضرب A في معكوسها يساوي مصفوفة الوحدة.

حل نظام معادلتين بطريقة كرامر

لحل النظام: 2x + y = 7 و3x + 4y = 18.

1. **محدد المعاملات D:** من معاملات x وy: D = det([[2, 1], [3, 4]]) = 5.

2. **المحدد Dx:** نستبدل عمود معاملات x بعمود الثوابت: Dx = det([[7, 1], [18, 4]]) = 28 − 18 = 10.

3. **المحدد Dy:** نستبدل عمود معاملات y بعمود الثوابت: Dy = det([[2, 7], [3, 18]]) = 36 − 21 = 15.

4. **الحل:** x = Dx ÷ D = 10 ÷ 5 = 2، و y = Dy ÷ D = 15 ÷ 5 = 3.

التحقق: 2 × 2 + 3 = 7 و2 × 3 + 4 × 3 = 18، وكلاهما صحيح.

متى لا تصلح طريقة كرامر؟

إذا كان D = 0 فلا تصلح الطريقة، ويكون للنظام إما عدد لا نهائي من الحلول أو لا حل له. وتمتد الطريقة نفسها إلى ثلاث معادلات في ثلاثة مجاهيل باستخدام محددات من الرتبة الثالثة.

تطبيق

ينتج مصنع نوعين من المنتجات؛ الأول يحتاج ساعتين على الآلة (أ) و3 ساعات على الآلة (ب)، والثاني ساعة على (أ) و4 ساعات على (ب). إذا كانت الساعات المتاحة 7 ساعات للآلة (أ) و18 ساعة للآلة (ب)، فعدد الوحدات التي تستغل الوقت بالكامل يحقق النظام السابق نفسه: وحدتان من الأول و3 وحدات من الثاني.