الدوال والخط المستقيم وتطبيقاته

رياضة ١ — إدارة الأعمال

مفهوم الدالة

الدالة قاعدة تربط كل عنصر من مجموعة تسمى **المجال** بعنصر واحد فقط من مجموعة أخرى. نكتب y = f(x)، حيث x المتغير المستقل وy المتغير التابع. فإذا كانت f(x) = 3x + 2، فإن f(4) = 3 × 4 + 2 = 14، وf(0) = 2.

مجال الدالة

المجال هو مجموعة القيم المسموح بالتعويض بها. فمجال الدالة f(x) = 1 ÷ (x − 3) كل الأعداد الحقيقية ما عدا 3 لأن القسمة على صفر غير معرّفة. وفي التطبيقات التجارية يكون المجال غالباً أعداداً غير سالبة، لأن الكمية المنتجة لا تكون سالبة.

الدالة الخطية

هي دالة على الصورة y = mx + b، وتمثيلها البياني خط مستقيم، حيث:

- **m هو الميل:** مقدار تغير y عندما تزيد x بمقدار وحدة واحدة.
- **b هو المقطع الصادي:** قيمة y عندما x = 0، أي نقطة تقاطع الخط مع المحور الرأسي.

حساب الميل

إذا مرّ الخط بالنقطتين (x1, y1) و(x2, y2) فإن: الميل m = (y2 − y1) ÷ (x2 − x1).

مثال: الخط المار بالنقطتين (1, 3) و(4, 9) ميله m = (9 − 3) ÷ (4 − 1) = 6 ÷ 3 = 2.

دلالة الميل

- الميل الموجب: الخط صاعد، أي y تزيد بزيادة x.
- الميل السالب: الخط هابط.
- الميل صفر: خط أفقي.
- الخط الرأسي ميله غير معرّف.
- الخطان المتوازيان لهما الميل نفسه.

معادلة الخط المستقيم

إذا عرفنا الميل m ونقطة (x1, y1) على الخط فمعادلته: y − y1 = m(x − x1).

في المثال السابق: y − 3 = 2(x − 1)، أي y = 2x − 2 + 3، إذن y = 2x + 1. وللتحقق نعوض النقطة (4, 9): 9 = 1 + 4 × 2 صحيح.

رسم الخط

يكفي إيجاد نقطتين. للخط y = 2x + 1: عند x = 0 تكون y = 1، وعند x = 2 تكون y = 5، ثم نصل النقطتين (0, 1) و(2, 5).

تطبيقات تجارية: التكلفة والإيراد والربح

دالة التكلفة

تتكون التكلفة الكلية من تكاليف ثابتة لا تتغير بالإنتاج (كالإيجار) وتكاليف متغيرة تتناسب مع عدد الوحدات. فإذا كانت التكاليف الثابتة لورشة 2000 دينار وتكلفة الوحدة 15 ديناراً: C(x) = 2000 + 15x. الميل هنا 15 ويمثل التكلفة الحدية للوحدة.

دالة الإيراد

إذا كان سعر بيع الوحدة 25 ديناراً: R(x) = 25x.

دالة الربح

الربح = الإيراد − التكلفة: P(x) = 25x − (2000 + 15x) = 10x − 2000.

نقطة التعادل

هي عدد الوحدات الذي يتساوى عنده الإيراد مع التكلفة فلا ربح ولا خسارة: 25x = 2000 + 15x، إذن 10x = 2000 وx = 200 وحدة. والإيراد عندها 25 × 200 = 5000 دينار.

- إذا باعت الورشة 300 وحدة: الربح = 10 × 300 − 2000 = 1000 دينار.
- إذا باعت 150 وحدة: الربح = 1500 − 2000 = −500، أي خسارة 500 دينار.

وبيانياً، نقطة التعادل هي نقطة تقاطع خط الإيراد مع خط التكلفة؛ فعلى يمينها تقع منطقة الربح وعلى يسارها منطقة الخسارة.

دالة الطلب الخطية

مثال: إذا كانت الكمية المطلوبة 100 وحدة عند سعر 10 دنانير، و80 وحدة عند سعر 14 ديناراً، فميل العلاقة بين السعر p والكمية q هو (14 − 10) ÷ (80 − 100) = −0.2، ومعادلتها p − 10 = −0.2(q −

(100، أي p = −0.2q + 30. الميل السالب يعبّر عن قانون الطلب: كلما ارتفع السعر قلت الكمية المطلوبة.