المتباينات والقيمة المطلقة

رياضة ١ — إدارة الأعمال

مفهوم المتباينة

المتباينة علاقة تقارن بين مقدارين باستخدام أحد الرموز: أصغر من (<)، أكبر من (>)، أصغر من أو يساوي (≤)، أكبر من أو يساوي (≥). وحل المتباينة ليس قيمة واحدة غالباً، بل مجموعة من القيم نعبّر عنها بفترة أو نمثلها على خط الأعداد.

خواص المتباينات

1. إضافة العدد نفسه إلى طرفي المتباينة أو طرحه منهما لا يغيّر اتجاهها: إذا كان $a < b$ فإن $a + c < b + c$.
2. ضرب الطرفين أو قسمتهما على عدد **موجب** لا يغيّر اتجاهها.
3. ضرب الطرفين أو قسمتهما على عدد **سالب** يعكس اتجاه المتباينة. فمثلاً $2 < 5$، لكن بالضرب في -1 نحصل على $-2 > -5$.

الخاصية الثالثة هي أكثر ما يُخطئ فيه الطلاب، فانتبه لها دائماً.

حل المتباينات الخطية

مثال 1: حل $2x - 3 < 7$.

نضيف 3 للطرفين: $2x < 10$، ثم نقسم على 2: $x < 5$. الحل هو الفترة $(-\infty, 5)$.

مثال 2: حل $-3x \geq 12$.

نقسم على -3 ونعكس الاتجاه: $x \leq -4$. الحل هو الفترة $(-\infty, -4]$.

مثال 3: حل $5x + 2 \leq 2x + 11$.

ننقل: $5x - 2x \leq 11 - 2$، إذن $3x \leq 9$ و $x \leq 3$.

المتباينة المزدوجة

حل $-1 \leq 2x + 3 < 9$.

نطرح 3 من الأطراف الثلاثة: $-4 \leq 2x < 6$، ثم نقسم على 2: $-2 \leq x < 3$. الحل هو الفترة $[-2, 3)$، أي أن x أكبر من أو يساوي -2 وأصغر من 3.

القيمة المطلقة

القيمة المطلقة للعدد x، ورمزها |x|، هي بُعده عن الصفر على خط الأعداد، فهي دائماً غير سالبة: |5| = 5 و|−5| = 5 و|0| = 0. ورياضياً: |x| = x إذا كان x ≥ 0، و|x| = −x إذا كان x < 0.

معادلات القيمة المطلقة

- |x| = 5 يعني x = 5 أو x = −5.
- |x − 2| = 3 يعني x − 2 = 3 أو x − 2 = −3، إذن x = 5 أو x = −1.

متباينات القيمة المطلقة

- |x| < a (حيث a موجب) تعني −a < x < a.
- |x| > a تعني x > a أو x < −a.

مثال: حل |x − 2| < 3.

تصبح −3 < x − 2 < 3، وبإضافة 2: −1 < x < 5.

مثال: حل |x| ≥ 4.

الحل x ≥ 4 أو x ≤ −4.

تطبيقات تجارية

شرط تحقيق الربح

تبيع شركة منتجاً بسعر 40 ديناراً للوحدة، وتكاليفها الثابتة 2000 دينار ولا تكاليف متغيرة تُذكر. يكون الربح 40x − 2000، ولتحقيق ربح موجب نحل 40x − 2000 > 0، أي 40x > 2000، إذن x > 50. يجب بيع أكثر من 50 وحدة.

حدود الميزانية

لدى قسم ميزانية لا تتجاوز 1500 دينار لشراء أجهزة سعر الواحد 250 ديناراً مع رسوم توصيل ثابتة 100 دينار. نحل 250x + 100 ≤ 1500، فنحصل على 250x ≤ 1400، إذن x ≤ 5.6. وبما أن عدد الأجهزة عدد صحيح، فأقصى عدد يمكن شراؤه 5 أجهزة.

هامش التفاوت في الجودة

إذا كان الوزن المطلوب لعبوة 500 غرام بتفاوت مسموح 5 غرامات، فالشرط هو |w − 500| ≤ 5، أي 495 ≤ w ≤ 505. وهكذا تُستخدم القيمة المطلقة في ضبط الجودة.