المعادلات الخطية والتربيعية

رياضة ١ — إدارة الأعمال

المعادلة الخطية في متغير واحد

هي معادلة على الصورة ax + b = 0 حيث a لا يساوي صفراً، وحلها x = −b ÷ a. ولحل أي معادلة خطية نجمع الحدود التي فيها المتغير في طرف والأعداد في الطرف الآخر، مع مراعاة أن ما نفعله في طرف نفعله في الطرف الآخر.

مثال 1: حل المعادلة 3x + 5 = 20.

نطرح 5 من الطرفين: 3x = 15، ثم نقسم على 3: x = 5.

التحقق: 3 × 5 + 5 = 20 صحيح.

مثال 2: حل المعادلة 2(x − 3) = x + 4.

نفك القوس: 2x − 6 = x + 4، ثم ننقل: 2x − x = 4 + 6، إذن x = 10.

مثال 3 (كسور): حل المعادلة x/2 + x/3 = 10.

نضرب الطرفين في 6 (المضاعف المشترك الأصغر): 3x + 2x = 60، إذن 5x = 60 و x = 12.

نظام معادلتين خطيتين

نحتاج أحياناً إلى إيجاد قيمتين مجهولتين تحققان معادلتين معاً.

طريقة الحذف

حل النظام: x + y = 10 و x − y = 4.

بجمع المعادلتين: 2x = 14، إذن x = 7. وبالتعويض في الأولى: 7 + y = 10، إذن y = 3.

طريقة التعويض

حل النظام: y = 2x و x + y = 12.

نعوض الأولى في الثانية: x + 2x = 12، إذن x = 4 و y = 8.

تطبيق: باع متجر 10 قطع من نوعين، سعر الأول 3 دنانير والثاني 5 دنانير، والإيراد 38 ديناراً. إذا كان x عدد قطع النوع الأول وy عدد قطع الثاني: x + y = 10 و 3x + 5y = 38. من الأولى x = 10 − y، وبالتعويض: 30 − 3y + 5y = 38، إذن 2y = 8 و y = 4 و x = 6.

المعادلة التربيعية

هي معادلة على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث a لا يساوي صفراً، ولها حلان على الأكثر.

الحل بالتحليل

حل المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$.

نبحث عن عددين حاصل ضربهما 6 ومجموعهما -5، وهما -2 و-3: $(x - 2)(x - 3) = 0$، إذن $x = 2$ أو $x = 3$.

الحل بالقانون العام

$x = (-b \pm$ الجذر التربيعي لـ $(b^2 - 4ac)) \div 2a$.

حل المعادلة $2x^2 + 3x - 2 = 0$: هنا $a = 2$ و$b = 3$ و$c = -2$.

المميز $= b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25$، وجذره 5.

$x = (-3 - 5) \div 4 = -2$ أو $x = (-3 + 5) \div 4 = 0.5$.

المميز ونوع الجذور

المقدار $b^2 - 4ac$ يسمى **المميز**، ومنه نعرف نوع الحلول دون حلها:

- إذا كان المميز موجباً فللمعادلة حلان حقيقيان مختلفان.
- إذا كان المميز صفراً فللمعادلة حل حقيقي واحد مكرر، مثل $x^2 - 6x + 9 = 0$ وحلها $x = 3$.
- إذا كان المميز سالباً فلا توجد حلول حقيقية، مثل $x^2 + x + 5 = 0$ لأن المميز $= 1 - 20 = -19$.

تطبيق تجاري

ربح شركة بالآلاف يُعطى بالعلاقة $P = -x^2 + 12x - 20$ حيث x عدد الوحدات بالمئات. متى يكون الربح صفراً؟ نحل $x^2 - 12x + 20 = 0-$، أي $(x - 2)(x - 10) = 0$، فنحصل على $x = 2$ أو $x = 10$. فالشركة تحقق ربحاً موجباً عندما يكون الإنتاج بين 200 و1000 وحدة.