المجموعات والعمليات عليها

رياضة ١ — إدارة الأعمال

تعريف المجموعة

المجموعة هي تجمّع من الأشياء المحددة تحديداً تاماً، تسمى **عناصر** المجموعة. نرمز للمجموعات بحروف كبيرة مثل A وB، ونكتب عناصرها بين قوسين معقوفين. فإذا كان العنصر 3 ينتمي إلى A نكتب $3 \in A$، وإذا كان 8 لا ينتمي إليها نكتب $8 \notin A$.

طرق كتابة المجموعة

- **طريقة السرد:** نكتب جميع العناصر، مثل $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- **طريقة الصفة المميزة:** نصف العناصر بشرط، مثل $A = \{x : x \text{ عدد طبيعي}، x \leq 5\}$.

أنواع المجموعات

- **المجموعة الخالية:** لا تحتوي أي عنصر، ورمزها $\varnothing$ أو $\{\}$.
- **المجموعة المنتهية:** عدد عناصرها محدود، ونرمز لعدد عناصر A بالرمز $n(A)$.
- **المجموعة غير المنتهية:** مثل مجموعة الأعداد الطبيعية.
- **المجموعة الشاملة U:** المجموعة التي تحتوي جميع العناصر قيد الدراسة.
- **المجموعات المتساوية:** لها نفس العناصر تماماً بغض النظر عن ترتيبها.

المجموعة الجزئية

نقول إن B مجموعة جزئية من A ونكتب $B \subset A$ إذا كان كل عنصر في B موجوداً في A. والمجموعة الخالية جزئية من أي مجموعة، وكل مجموعة جزئية من نفسها. وعدد المجموعات الجزئية لمجموعة فيها n عنصراً يساوي 2 مرفوعة للقوة n؛ فمجموعة من 3 عناصر لها 8 مجموعات جزئية.

العمليات على المجموعات

لتكن $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ و$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و$B = \{4, 5, 6, 7\}$.

1. **الاتحاد $A \cup B$:** جميع العناصر الموجودة في A أو في B أو فيهما معاً دون تكرار: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

2. **التقاطع A ∩ B:** العناصر المشتركة بين المجموعتين: A ∩ B = {4, 5}. وإذا كان التقاطع خالياً سميت المجموعتان **منفصلتين**.
3. **الفرق A − B:** العناصر الموجودة في A وليست في B: A − B = {1, 2, 3}، بينما B − A = {6, 7}. لاحظ أن الفرق ليس إبدالياً.
4. **المتممة (ونرمز لها بالرمز A'):** عناصر المجموعة الشاملة التي ليست في A، فهي هنا {6, 7, 8, 9, 10}.

أشكال فن

نمثل المجموعة الشاملة بمستطيل والمجموعات داخله بدوائر. يكون التقاطع هو المنطقة المشتركة بين الدائرتين، والاتحاد هو كل المنطقة التي تغطيها الدائرتان. وتساعد هذه الأشكال على تصور المسائل وحلها.

قانون عدد عناصر الاتحاد

n(A ∪ B) = n(A) + n(B) − n(A ∩ B).

نطرح عدد عناصر التقاطع لأنها حُسبت مرتين. في مثالنا: n(A ∪ B) = 5 + 4 − 2 = 7، وهو ما يطابق السرد.

مثال تطبيقي

في دفعة من 60 طالباً، يدرس 35 منهم دورة لغة إنجليزية، و25 يدرسون دورة حاسوب، و10 يدرسون الدورتين معاً. كم طالباً يدرس دورة واحدة على الأقل؟ وكم طالباً لا يدرس أياً منهما؟

- عدد من يدرسون دورة واحدة على الأقل = 35 + 25 − 10 = 50 طالباً.
- عدد من لا يدرسون أياً منهما = 60 − 50 = 10 طلاب.
- عدد من يدرسون الإنجليزية فقط = 35 − 10 = 25، والحاسوب فقط = 25 − 10 = 15.

مثل هذه المسائل شائعة في تحليل استبيانات العملاء، كمعرفة عدد العملاء الذين يشترون منتجين معاً.